

暖包的数学建模

学习阶段: 3

范畴: 数与代数、数据处理

学习单位: (i) 公式
(ii) 数据的组织
(iii) 数据的表达

目标: (i) 判断*最佳*产品的因素
(ii) 建立一条数学公式来比较不同产品
(iii) 学习数学建模的过程

先备知识: 利用图表和统计知识表达量度的数据

教学资源: 暖包、温度计、工作纸

背景资料:

市面有不同牌子的暖包。当人们购买暖包时，他们会如何选择呢？在本活动，学生需要建立一个模型，用于判断*最佳*的暖包。活动工作纸可以在本例子的附录中找到。

活动详情：

活动 1：数据收集

1. 教师可以运用以下问题激发学生对活动的兴趣。
 - 你如何选购一盒暖包？
 - 当你购买一盒暖包时，你会考虑哪些因素？
 - 何谓最佳暖包？
2. 将学生分成 3-4 人一组，讨论可能影响他们选择的因素，并将因素填写在以下空格。
_____, _____, _____, _____,
_____, _____, _____, _____,
_____, _____, _____, _____.
3. 教师可继续讨论学生们提出的因素，例如价格、大小、重量、外观、使用时间和效率等。为了找出最佳暖包，这些因素必须被量化，且需要设置一个评分公式来比较不同的暖包。有关评分公式的讨论将在下一个活动中进行。
4. 教师可与学生讨论影响一个暖包「使用时间」的因素。由于暖包的温度会随时间变化，教师可要求学生定义暖包的使用时间。

你如何定义暖包的使用时间？

基于甚么假设？

5. 学生分组工作。他们需要取决最多四个重要的因素，以纳入评分公式。

重要的因素：

① _____, ② _____,

| |
|-------------------|
| ③ _____, ④ _____. |
|-------------------|

6. 随后,学生在下一个任务之前收集有关他们选购不同牌子暖包的因素的数据。

| 度量 | 因素 | | | |
|----|----|---|---|---|
| 牌子 | ① | ② | ③ | ④ |
| A | | | | |
| B | | | | |
| C | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

教师注意事项:

1. 进行本活动时可考虑以下因素:

- 价格
- 功能 / 质量
- 使用时间
- 温度 (最大温度, 平均温度)
- 大小
- 重量
- 广告设计
- 有效期
- 其他

2. 有些学生可能会将暖包的特定温度下降的时间视为使用时间。在这种情况下,教师可以使用以下图表与学生讨论,在量度暖包的使用时间时可能要考虑其他因素。例如,图 1 显示了牌子 A 和牌子 B 暖包的温度-时间图。牌子 A 从 50°C 降至 22°C 需要 25 小时,而牌子 B 从 50°C 降至 15°C 需要 25 小时。学生必须以量化方式比较这两个牌子。学生可以使用某些时间间隔内的平均温度作为使用时间的指针,以区分这两个牌子。一种方法是使用 5 小时作为时间间隔单位,再从 0 小时到 25 小时计算平均温度。

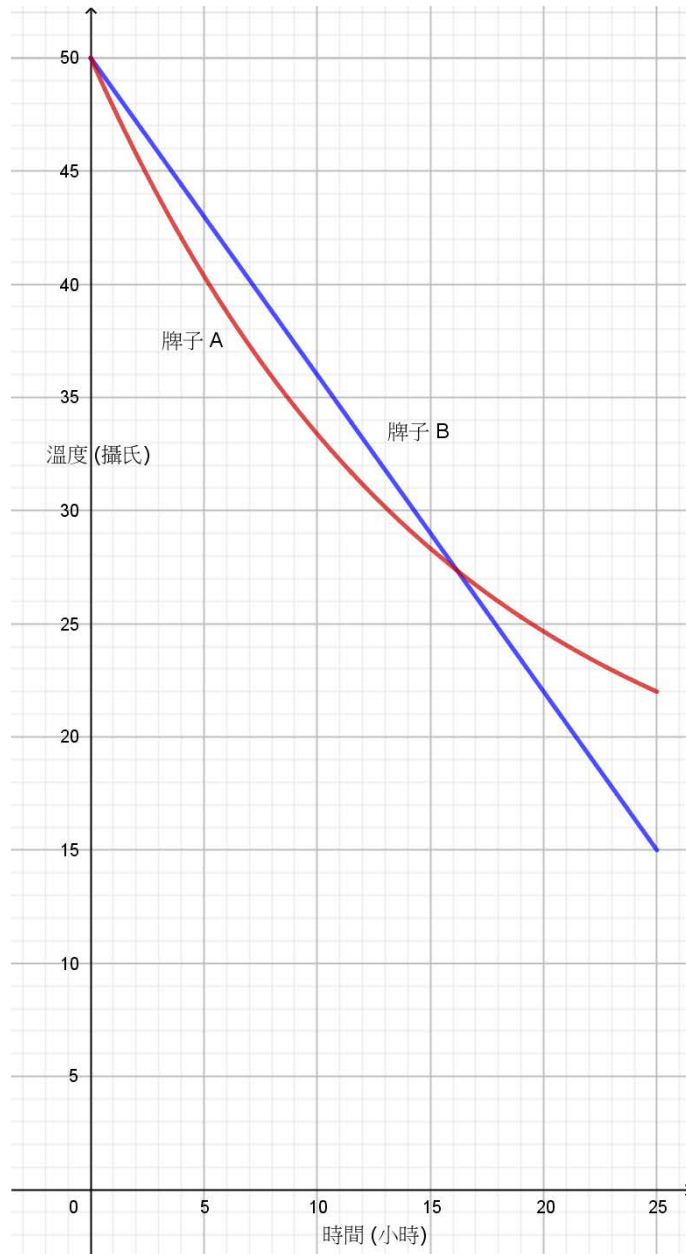


图 1

3. 教师可以提出以下问题，以增强学生对使用时间的讨论。
 - 如何定义一个暖包的使用时间？
 - 牌子 A 和牌子 B 的使用时间是否相同？
 - 你可以描述两个牌子暖包的差异吗？
 - 如何计算一个暖包的平均温度？

4. 由于学生可能会在一定时间内收集温度数据，教师可以利用这些真实数据作为起点介绍平均温度的概念。

5. 若有足够时间，学生可以绘制暖包对时间的图表。他们可以讨论不同图表的特征，并设定适当的标准来判断暖包的使用时间。

活动 2：数学建模

1. 教师介绍了一些数学建模的基本概念后，让学生讨论如何建立暖包的评分公式。评分公式可包括以下重点：
- 定义一些变量，并加以量度。必要时绘制图表以表示这些变量。
 - 建立一个比较用的评分公式。
 - 与其他小组成员进行讨论和交流。
 - 如有需要，检讨并修改评分公式。
 - 进行计算。
 - 得出最终结论，并在课堂上分享。
2. 教师可以使用以下公式作为起点，让学生讨论以下评分公式是否是一个好的公式。

$$\text{评分公式 1: } (\text{使用时间}) \div (\text{价格})$$

建议讨论的问题包括：

- 此公式的优点是甚么？
- 此公式的缺点是甚么？
- 哪些因素尚未纳入考虑？

3. 教师可以与学生讨论其他公式。

$$\text{评分公式 2: } 0.8 \times (\text{使用时间}) \div 24 + 0.2 \times (\text{价格}) \div 5$$

建议讨论的问题包括：

- 为什么公式中会有「 $(\text{使用时间}) \div 24$ 」这一项？
- 为什么公式中会有「 $0.8 \times \dots + 0.2 \times \dots$ 」这一项？

4. 学生分组讨论，设计自己的评分公式，并输入他们收集的数据进行比较。

我们的评分公式

当你设计自己的评分公式时，基于甚么假设？

假设 1:

假设 2:

假设 3:

假设 4:

5. 学生列出不同牌子暖包的排行榜。

不同牌子暖包的排行榜

| 牌子 | 得分 | 次序 |
|----|----|----|
| A | | |
| B | | |
| C | | |
| D | | |

6. 学生向全班展示他们的发现。他们必须解释设计自己的评分公式时所采用的假设。其他学生可以对此进行评论。
7. 学生检讨公式和计算结果。如有必要，进行修改。

教师注意事项:

1. 一些建议的公式，用于讨论其特点和缺点:

- ✧ (价格)+(重量)+(使用时间) ①
- ✧ (价格) \div 10+(使用时间) \div 12 ②
- ✧ $0.7\times$ (使用时间) \div 24+ $0.3\times$ (价格) \div 10 ③
- ✧ (平均温度-36.6) \div [(80-36.6) \div 2] ④

公式的评论:

公式 ①: 这三个因素无法直接相加，因为它们来自不同的量度方法。

公式 ②: 此公式考虑了标准化因素，因为它假设最高价格为 \$10，最长使用时间为 12 小时。

公式 ③: 此公式考虑了标准化因素，因为它假设最高价格为 \$10，最长使用时间为 24 小时，权重因素 0.7 和 0.3 也包含在公式中。

公式 ④: 此公式假设暖包的最低温度为摄氏 36.6 度，最高温度为摄氏 80 度。

2. 教师可以向学生介绍加权平均的概念，以帮助他们设定评分公式。

3. 除了建立评分公式外，同样重要的是，在数学建模的过程中，学生应该意识到评分公式的假设和限制。

工作纸

引言

如果你要买一盒暖包，该如何比较不同牌子的暖包呢？以下是一些讨论的起点问题，供参考：

- 你如何选购一盒暖包？
- 当你购买一盒暖包时，你会考虑哪些因素？
- 何谓**最佳**暖包？

活动 1：数据收集

1. 以 3-4 人为一组进行活动，讨论可能影响你们选择的因素，并将不同因素填写在以下空格。

_____， _____， _____， _____，
 _____， _____， _____， _____，
 _____， _____， _____， _____。

2. 为了找出**最好的**暖包，需要将各种因素量化，并需要一个评分公式来比较不同牌子的暖包。至于评分公式的讨论将在下一个活动中进行。在本活动中，我们将量化其中一个因素。
3. 例如，「使用时间」可能是你考虑的暖包主要因素之一。回答以下问题。

你如何定义暖包的使用时间？

基于甚么假设？

4. 图 1 显示了两牌子暖包的温度-时间图。牌子 A 从 50°C 降至 22°C 需时 25 小时，而牌子 B 从 50°C 降至 15°C 需要 25 小时。你必须以量化方式比较这两个牌子。

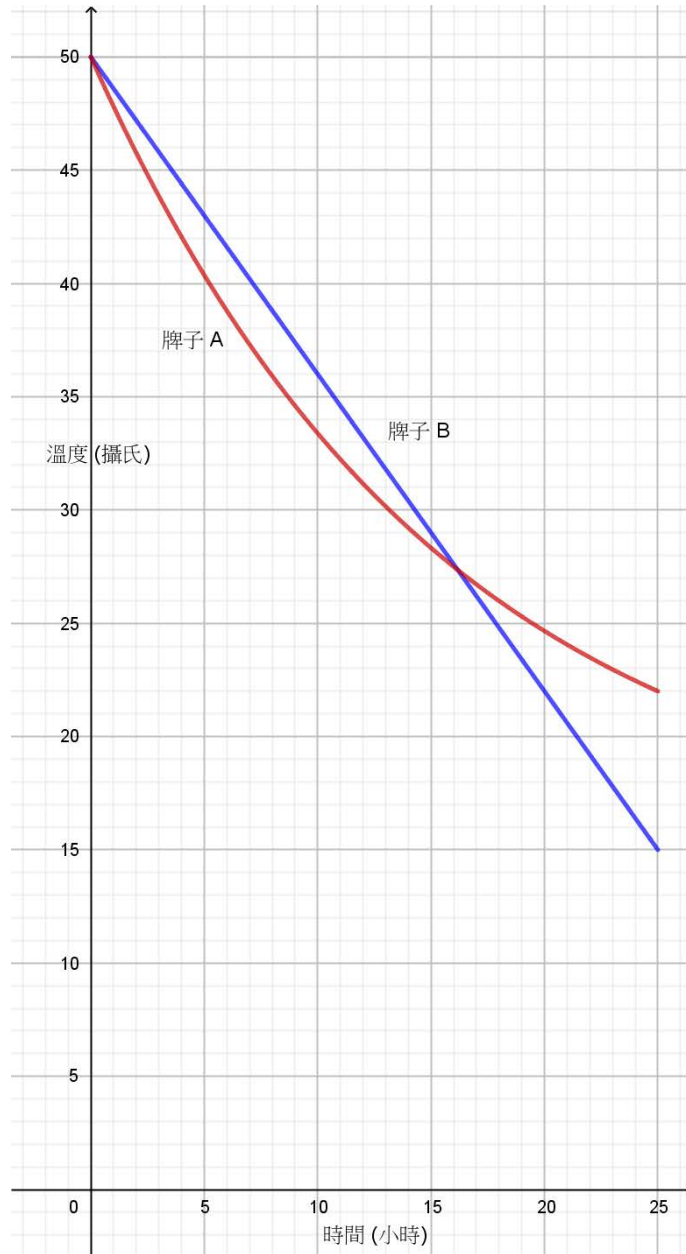


图 1

你将如何量化以比较这两个品牌的暖包呢？
在下面写下你的建议。

5. 以小组形式进行分组。在设计一个评分公式来比较不同牌子的暖包之前，你必须选取最多四个重要因素，并尝试量化每个因素以进行比较。

重要的因素：

① _____, ② _____,

③ _____, ④ _____.

如何量化这些因素？

因素 ①

因素 ②

因素 ③

因素 ④

6. 在下一个活动之前，请在家收集关于你选购不同品牌暖包的因素的数据。

| 度量 | 因素 | | | |
|----|----|---|---|---|
| | ① | ② | ③ | ④ |
| 牌子 | | | | |
| A | | | | |
| B | | | | |
| C | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

活动 2：数学建模

1. 进行小组讨论，设计自己的评分公式，并输入你在活动 1 中收集的数据进行比较。

我们的评分公式

当你设计自己的评分公式时，有哪些假设？

假设 1:

假设 2:

假设 3:

假设 4:

2. 列出不同牌子暖包的排行榜。

不同牌子暖包的排行榜

| 牌子 | 得分 | 次序 |
|----|----|----|
| A | | |
| B | | |
| C | | |
| D | | |

3. 向全班展示你们的发现。解释设计你们的评分公式时所采用的假设。
4. 检讨公式和计算结果。如有必要，进行修改。

工作纸的建议答案

活动 1

1. 建议本活动可考虑的因素：

- 价格
- 功能 / 质量
- 使用时间
- 温度（最大温度，平均温度）
- 大小
- 重量
- 广告设计
- 有效期
- 其他

2. (a) 一个暖包的使用时间 = 特定温度下降的时间

(b) 假设

✧ 周围没有热量散失。

✧ 实验是以公平的方式进行的。

3. 以 5 小时作为时间间距，

$$\text{牌子 A 的平均温度} = \frac{50+40.4+33.4+28.3+24.7+22}{6} = 33.1 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

$$\text{牌子 B 的平均温度} = \frac{50+43+36+29+22+15}{6} = 32.5 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

因此，牌子 A 的表现优胜于牌子。